Développement : Méthode de Newton multi-D

· Florian Lavigne, 70 développements pour l'agrégation de mathématiques, Ellipses 2018 (p 111)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^2.

On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que $f(a) = 0$ et $df(a)$ inversible.

Soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(a,r) \subset U$.

Posons $k = \sup\limits_{x \in \overline{B}(a,r)} \| df(a)^{-1} d^2 f(x) \|$

Supposons $2kr \leq 1$

Alors pour $\varphi : x \mapsto x - df(x)^{-1} \circ f(x)$

1) φ est bien définie sur $B = \overline{B}(a,r)$

2) $\varphi(B) \subset B$

3) Pour tout $x_0 \in B$, on pose $x_m = \varphi^m(x_0)$ $(m \in \mathbb{N})$

et on a $\|x_m - a\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^m - 1} \|x_0 - a\|$ $(*)$

Autrement dit, pour $x_0 \in \overline{B}(a,r)$, la suite $(\varphi^m(x_0))$ est bien définie et tend vers a. La vitesse de convergence est donnée par $(*)$

1) Fait : si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ est tel que $0 \leq \|u\| < \frac{1}{2}$, $id - u$ est inversible

et $\|(id - u)^{-1}\| \leq 2$.

Soit $x \in B$. Montrons que $df(x)$ est inversible.

Comme B est convexe, appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à df en a :

$x = a + h$

$$df(x) - df(a) = \int_0^1 d^2 f(a + t(x-a))(x-a)(\cdot)\, dt$$

Ainsi,

$$df(a)^{-1} df(x) - id = \int_0^1 df(a)^{-1} d^2 f(a + t(x-a))(x-a)(\cdot)\, dt$$

$$\|df(a)^{-1} df(x) - id\| \leq \int_0^1 \|df(a)^{-1} d^2 f(a + t(x-a))(x-a)(\cdot)\| dt$$

$$\leq \int_0^1 k \|x - a\| dt$$

$$\leq kr < \frac{1}{2}$$

D'après le fait, $df(a)^{-1} \circ df(x)$ est inversible (donc $df(x)$ aussi).

et $\|df(a)^{-1} \circ df(x)\| \leq 2$

2) Soit $x \in B$.

Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 en x, évalué en a :

$h = a - x$

$$0 = f(a) = f(x) + df(x)(a-x) + \int_0^1 (1-t) d^2 f(x + t(a-x))(a-x)(a-x)\, dt$$

Alors, on a

$$\varphi(x) - a = x - a - df(x)^{-1}(f(x))$$

$$= x - a - df(x)^{-1}\left(-df(x)(a-x) - \int_0^1 (1-t) d^2 f(x + t(a-x))(a-x)(a-x)\, dt\right)$$

$$= x - a + a - x + df(x)^{-1} \int_0^1 (1-t) d^2 f(x + t(a-x))(a-x)(a-x)\, dt$$

$= df(x)^{-1} \circ df(a) \circ \int_0^1 (1-t) df(a)^{-1} \circ d^2 f \,(x+t(a-x))(a-x)(a-x)\, dt$

D'où

$\|\ell(x)-a\| \leq \|df(x)^{-1} \circ df(a)\| \int_0^1 |1-t| \|df(a)^{-1} \circ d^2 f(a+t(a-x))\| \|x-a\|^2 \, dt$

$\leq 2 \times \frac{1}{2} \times k \|x-a\|^2 \leq \underbrace{k r}_{\leq \frac{1}{2}} \times r$

Cela prouve que $\ell(B) \subset B$.

La suite (x_m) définie par la relation de récurrence $\begin{cases} x_0 \in B \\ x_{m+1} = \ell(x_m) \end{cases}$ est bien définie

3) On démontre le résultat par récurrence.

Pour $m=0$ $\|x_0 - a\| \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{2^0-1}}_{=1} \|x_0 - a\|$

Supposons la relation vraie pour un certain $m \in \mathbb{N}$

on a $\|x_{m+1} - a\| = \|\ell(x_m) - a\| \leq k \|x_m - a\|^2$ par ce qui précède

$\leq k \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^m-1} \|x_0 - a\| \right)^2$

$\leq k \|x_0 - a\| \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{m+1}-2} \|x_0 - a\|$

$2\|x_0 - a\| \leq \frac{1}{k}$

$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{m+1}-1} \|x_0 - a\|$

D'où la formule vraie au rang $m+1$.

(Donc la formule est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$).

$\square$

Rq

. un tel r existe r existe car f est de classe $\mathcal{C}^2$.

on prend un R quelconque et on prend le sup associé puis $r < \frac{1}{2 \sup}$, $r < R$

Développement : Méthode de Newton

. François Rouvière, Petit guide du calcul différentiel [p152]

Thm : Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c; d]$. On considère la suite récurrente $x_0 \in [c; d]$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$

Alors, en notant a l'unique 0 de f, on a :

(i) Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [a-\alpha; a+\alpha]$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a de manière quadratique : il existe $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|x_{n+1} - a| \leq C |x_n - a|^2$

(ii) Si de plus $f'' > 0$ sur $[a; d]$, alors pour tout $x_0 \in]a; d]$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et $x_{n+1} - a \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)} (x_n - a)^2$

[Preuve] On pose $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

de sorte que $x_{n+1} = F(x_n)$

. La fonction f est continue sur $[c; d]$ croît strictement de $f(c) < 0$ à $f(d) > 0$ donc s'annule en une unique point $a \in]c; d[$. Un calcul immédiat donne $F(a) = a$, $F'(a) = 0$ (on s'attend à avoir $F(x) - a$ de l'ordre de $(x-a)^2$)

Comme $f(a) = 0$, on peut écrire pour $x \in [c; d]$

$$F(x) - a = x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} = \frac{f(a) - f(x) - (a-x) f'(x)}{f'(x)}$$

Formule de Taylor à l'ordre 2 d'origine x et d'extrémité a : il existe z compris strictement entre x et a tel que

$$F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x)} (x-a)^2 \quad (*)$$

En prenant $C = \frac{\max |f''|}{2 \min f'}$ où max et min sont pris sur l'intervalle $[c; d]$

Bien défini par hypothèse !

On tire de $(*)$ l'inégalité $|F(x) - a| \leq C |x-a|^2$ $x \in [c; d]$

Soit $\alpha > 0$ assez petit tel que $C\alpha < 1$ et que l'intervalle $I = [a-\alpha; a+\alpha]$ soit contenu dans $[c; d]$. Alors $x \in I$ entraîne

$|F(x) - a| \leq C\alpha^2 < \alpha$ d'où $F(I) \subset I$: I stable par F.

Si $x_0 \in I$, on a donc $x_n \in I$ pour tout n et

$|x_{n+1} - a| = |F(x_n) - a| \leq C |x_n - a|^2$

Par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$C |x_n - a| \leq (C |x_0 - a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $C\alpha < 1$

ce qui montre (i)

• On suppose ici de plus que $f''>0$. La dérivée f' est ici croissante et f est une fonction convexe sur $]c;d[$.
Pour $a \leq x < d$ on a $f'(x)>0$ et $f(x)\geq 0$ d'où $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x$ avec inégalité stricte si $x>a$.
En reprenant $(*)$ on a d'autre part $F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2 \geq 0$ strictement si $x>a$.
Ces deux inégalités montrent que l'intervalle $I = [a;d]$ est stable par F et que, pour $a < x_0 < d$, les itérées x_n vérifient aussi $a < x_n \leq d$ et forment une suite strictement décroissante.
Si $x_0 = a$, la suite est constante. La suite (x_n) admet donc une limite l qui vérifie $F(l) = l$ donc $f(l) = 0$ et l ne peut être que a.
La cv de x_n vers a est quadratique comme précédemment
$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$$
Enfin cette inégalité est essentiellement optimale : si $a < x_0 \leq d$ on a $x>a$ pour tout n et $\frac{x_{n+1}-a}{(x_n-a)^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}$ (par $(*)$)
avec $a < z_n < x_n$ $\quad (f''>0)$
La fraction tend donc vers $\frac{f''(a)}{2f'(a)}$ lorsque $n \to +\infty$.
D'où l'équivalent (ii) puisque $f''>0$ □

• Application : on fixe $y>0$ et on prend $f(x) = x^2 - y$
=> approximation de $a = \sqrt{y}$
Toutes les hypothèses sont vérifiées pour $f(x) = x^2 - y$ sur un intervalle $[c;d]$ tel que $0<c<d$ et $c^2 < y < d^2$. Pour approcher le nombre $a = \sqrt{y}$ on doit itérer la fonction $F(x) = x - \frac{x^2-y}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{y}{x}\right)$. De plus on a $F(x) - a = \frac{(x-a)^2}{2x}$
Pour approcher l'autre racine carrée $-a = -\sqrt{y}$ la méthode conduirait à itérer la même fonction F, qui satisfait donc aussi à $F(x) + a = \frac{(x+a)^2}{2x}$. Par suite
$$\frac{F(x)-a}{F(x)+a} = \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2$$ pour $x>0$. Autrement dit $F = \varphi^{-1}\circ G\circ\varphi$
en notant $\varphi(x) = \frac{x-a}{x+a}$, $G(x) = x^2$. Ainsi, F est conjuguée à φ par la fonction $x \mapsto x^2$. L'itération $x_n = F^n(x_0)$ s'explicite alors en
$$x_n = (\varphi^{-1}\circ G^n\circ\varphi)(x_0) \text{ ie } \frac{x_n-a}{x_n+a} = \left(\frac{x_0-a}{x_0+a}\right)^{2^n}$$
Pour $x_0 > a$ on en déduit $x_n > a$ et $1 + \frac{2a}{x_n-a} = \left(1 + \frac{2a}{x_0-a}\right)^{2^n} \geq 1 + \left(\frac{2a}{x_0-a}\right)^{2^n}$
d'où la majoration d'erreur $0 < x_n - a \leq 2a\left(\frac{x_0-a}{2a}\right)^{2^n}$
□